

Лекція № 5

На минулій лекції почали обговорення особливостей перетворення векторів та псевдовекторів при операції інверсії (дзеркального відображення). Згадаємо, про що йде мова.

11. Перетворення тензорів при дзеркальному відображенні (інверсії). Інверсія є операцією зміни знаку у непарній кількості координат, тобто

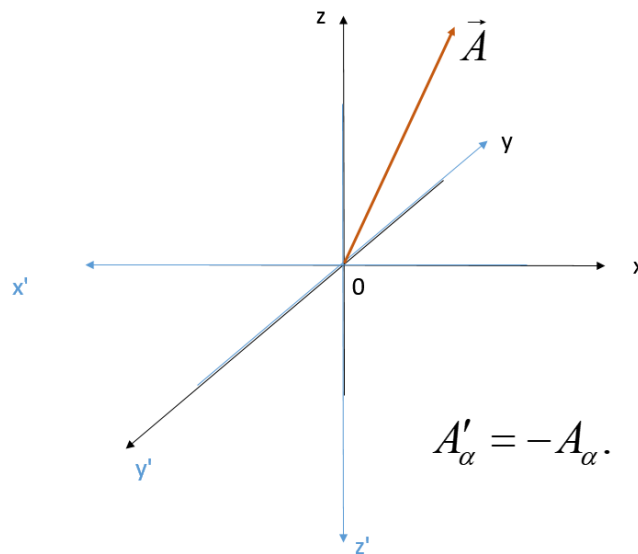
$$x'_\alpha = -x_\alpha. \quad (1.84)$$

Є фізичні величини, які при інверсії поведуть себе інакше, ніж при поворотах. Це, наприклад, кутова швидкість. Напрямок вектору кутової швидкості визначається напрямком обертання, а він не змінюється при дзеркальному відображенні. Звичайна ж швидкість при дзеркальному відображенні осей координат змінює знак.

Є два типи тривимірних векторів:

полярний вектор при інверсії (1.81) перетворюється так, як і координати

$$A'_\alpha = -A_\alpha. \quad (1.85)$$



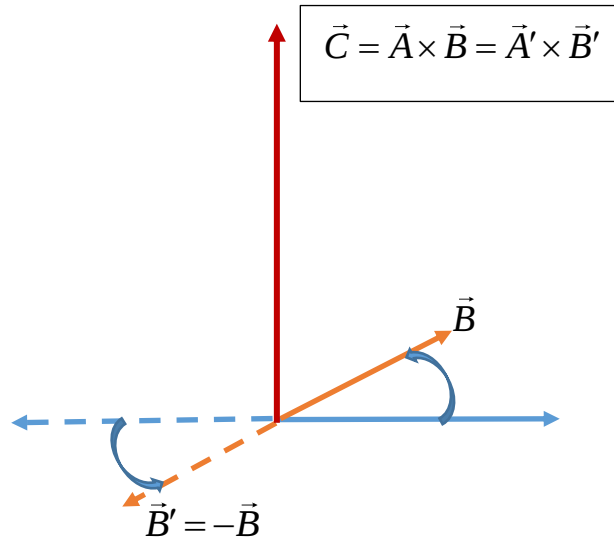
аксіальний вектор (псевдовектор) при інверсії (1.81) не змінюється

$$A'_\alpha = A_\alpha. \quad (1.86)$$

Приклад аксіального вектору – кутова швидкість $\vec{\omega}$.

Векторний добуток двох полярних векторів є псевдовектором. Напруженість електричного поля – полярний вектор, а напруженість магнітного поля – аксіальний вектор.

Ілюстрація, щодо векторного добутку. Згідно з визначенням векторного добутку, напрямком вектору $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ визначається за правилом правого гвинта.



Визначення «полярний» та «аксіальний» можна поширити на тензори будь-яких рангів. Нагадаємо, що визначник матриці повороту $\det a = 1$, а визначник матриці інверсії $\det a_I = -1$.

Закон перетворення псевдотензору

$$T_{\alpha\beta\ldots\gamma} = (\det a) a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \ldots a_{\gamma\gamma'} T'_{\alpha'\beta'\ldots\gamma'}. \quad (1.87)$$

Наприклад, псевдоскаляр при інверсії змінює знак. Прикладом псевдоскаляра є такий скалярний добуток $\vec{\omega} \cdot \vec{r}$. $\delta_{\alpha\beta}$ – тензор, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – псевдотензор.

1.9. Тензорна алгебра та елементи тензорного аналізу у чотиривимірному просторі-часі

В 4-просторі запропоновано два способи введення 4-радіус вектору, які вже ввели на минулих лекціях (див. ф-ли (1.34) та (1.43), (1.44)). Визначення (1.34)

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict; \quad i = \sqrt{-1}.$$

зручно для побудови релятивістської механіки та електродинаміки. Визначення (1.43), (1.44)

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z; \quad x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z$$

необхідні для переходу до загальної теорії відносності.

Перетворення Лоренца (1.38) з уявним часом переписуться так

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 - i\beta\gamma x'_4; \\
x_2 &= 0 \cdot x'_1 + 1 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 + 0 \cdot x'_4; \\
x_3 &= 0 \cdot x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 1 \cdot x'_3 + 0 \cdot x'_4; \\
x_4 &= i\beta\gamma x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 + \gamma x'_4; \\
\beta &= \left(\frac{V}{c} \right); \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned}$$

Скорочено

$$x_i = a_{ik} x'_k; \quad a_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

Тут a_{ik} – матриця частинних перетворень Лоренца в позначеннях із уявною часовою змінною. Індекс k , по якому проводиться додавання приймає значення $k=1,2,3,4$. так само індекс $i=1,2,3,4$. **Обернені** перетворення Лоренца з **уявним часом** задаються транспонованою матрицею

$$x'_i = a_{ki} x_k = \tilde{a}_{ik} x_k; \quad \tilde{a}_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

Для дійсного часу довелось ввести два типи компонент 4-радіус вектору – контрваріантні (1.43) (індекси зверху) та коваріантні (1.44) (індекси знизу) з нумерацією від 0 (часова змінна) до 3 (1,2,3 – просторові змінні). Для контрваріантних компонент (1.43)

$$\begin{aligned}
x^0 &= \gamma x^{0'} + \beta\gamma x^{1'} + 0 \cdot x^{2'} + 0 \cdot x^{3'}; \\
x^1 &= \beta\gamma x^{0'} + \gamma x^{1'} + 0 \cdot x^{2'} + 0 \cdot x^{3'}; \\
x^2 &= 0 \cdot x^{0'} + 0 \cdot x^{1'} + 1 \cdot x^{2'} + 0 \cdot x^{3'}; \\
x^3 &= 0 \cdot x^{0'} + 0 \cdot x^{1'} + 0 \cdot x^{2'} + 1 \cdot x^{3'}.
\end{aligned}$$

Скорочено

$$x^i = \alpha_{ik} x^{k'} \quad \alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

В загальній теорії відносності (теорії гравітації) інтервал залишається інваріантом, але його визначення змінюється

$$dS^2 = g_{ik} x^i x^k. \quad (1.91)$$

Метричний тензор g_{ik} визначає метрику простору при наявності матеріальних тіл, які створюють гравітаційні поля. Компоненти метричного тензору визначаються рівняннями, запропонованими А.Ейнштейном. Ейнштейн записав систему нелінійних диференціальних рівнянь, яким повинні задовольняти 10 коефіцієнтів g_{ik} . При наявності гравітаційних полів 4-простір-час стає викривленим.

Ми вивчаємо тільки електромагнітні поля, тому маємо справу з плоским 4-простором. Метричні коефіцієнти (метричний тензор) мають тільки діагональні компоненти. Для уявного часу всі 4 ненульові компоненти дорівнюють 1. Для дійсного часу в формулі (1.91)

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1. \quad (1.92)$$

Сігнатура псевдоевклідового простору з дійсним часом є такою: $(+ - - -)$.

Чотиривимірний тензор рангу r – це сукупність 4^r , які при поворотах координат перетворюються, як добутки компонент r векторів. На лекції № 3 вже дали визначення 4-тензору, але формулу перетворення не навели. Ось вона для контрваріантних компонент **4-тензору**:

$$T^{ik...l} = a_{i'i''} a_{kk'} ... a_{ll'} T^{i'k'...l'} \quad (1.93)$$

Ранг тензору визначається кількістю індексів. Тензор нульового рангу (без індексів) є скаляром, тензор 1-го рангу є вектором.

Для **псевдотензору** в формулу перетворення входить ще й визначник матриці перетворення

$$T^{ik...l} = (\det a) a_{i'i''} a_{kk'} ... a_{ll'} T^{i'k'...l'} \quad (1.94)$$

Симетрія та антисиметрія по парі індексів у 4-просторі визначається так само, як у 3-просторі. Ми домовилися основними вважати контрваріантні компоненти тензорів з індексами зверху.

В 4-просторі фізичні величини треба будувати так, щоб вони мали певні властивості при перетворення ІВС, тобто при перетвореннях Лоренца. Певні властивості при таких перетвореннях мають тільки тензори. Всі «реальні» фізичні величини повинні бути тензорами певних рангів (скалярами, векторами або тензорами рангу 2 чи більше). Наприклад, електромагнітне поле є антисиметричним 4-тензором 2-го рангу.

Симетричний 4-тензор другого рангу

$$A^{ik} = A^{ki} \quad (1.95)$$

У симетричного тензору змішані компоненти A^i_k та A_k^i співпадають, тому можна писати просто A_k^i .

Антисиметричний 4-тензор другого рангу

$$A^{ik} = -A^{ki}. \quad (1.96)$$

Діагональні компоненти антисиметричного тензору дорівнюють нулю.

Просторові компоненти антисиметричного 4-тензору по відношенню до чисто просторових поворотів складають тривимірний антисиметричний тензор (ми вже знаємо, що компоненти такого тензору виражаються через компоненти тривимірного аксіального вектору). Компоненти A^{01}, A^{02}, A^{03} є відносно просторових поворотів компонентами полярного тривимірного вектору. Таким чином антисиметричний 4-тензор 2-го рангу можна записати так:

$$A^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -a_3 & a_2 \\ -p_2 & a_3 & 0 & -a_1 \\ -p_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

В (1.97) $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ – полярний тривимірний вектор, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – аксіальний тривимірний вектор. Антисиметричний 4-тензор 2-го рангу можна записати так

$$A^{ik} = (\vec{p}, \vec{a}); \quad A_{ik} = (-\vec{p}, \vec{a}). \quad (1.98)$$

У будь-якій тензорній рівності вирази з обох сторін повинні стояти однакові та однаково розташовані (зверху або знизу) вільні («що говорять») індекси. Ці індекси можна переносити догори або донизу, але обов'язково одночасно в усіх членах рівняння.

Операція згортання тензору другого рангу A^{ik} до скаляру визначається так

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3 = A^i_i. \quad (1.99)$$

Скалярний добуток двох векторів є прикладом згортання (див ф-лу (1.55)) – утворення скаляру з тензору $A^i B_k$:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

При згортання по парі індексів ранг тензору знижується на 2. A^i_{kli} – тензор другого рангу, A^{ik}_{ik} – скаляр.

Одиничним 4-тензором називається тензор δ^i_k , для якого має місце така рівність

$$\delta^k_i A^i = A^k. \quad (1.100)$$

для будь-якого вектору A^i . Компоненти цього тензору

$$\delta^k_i = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (1.101)$$

Сума його діагональних елементів (слід) дорівнює 4.

Одиничний тензор δ^k_i пов'язаний з введеним раніш метричним тензором. Піднявши в δ^k_i один індекс отримаємо контраваріантний тензор g^{ik} ; опустивши в δ^k_i один індекс отримаємо коваріантний тензор g_{ik} . Тензори g^{ik} та g_{ik} мають однакові компоненти, які можна представили у вигляді таблиці

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

Індекс i нумерує рядки, а індекс k нумерує стовпці, $i, k = 0, 1, 2, 3$. Очевидно, що

$$g_{ik} A^k = A_i; \quad g^{ik} A_k = A^i. \quad (1.103)$$

Скалярний добуток двох векторів можна записати з використанням метричного тензору так

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \quad (1.104)$$

Тензори $\delta_k^i, g_{ik}, g^{ik}$ є інваріантними – їх компоненти однакові в усіх системах координат.

В 4-просторі є ще один інваріантний тензор – **повністю антисиметричний одиничний тензор 4-го рангу** ε^{iklm} . Ненульовими ± 1 залишаються тільки компоненти, у яких всі чотири індекси різні. Домовимось, що

$$\varepsilon^{0123} = +1. \quad (1.105)$$

Тоді $\varepsilon_{0123} = -1$. Знак «+» або «-» для інших компонент визначається парністю чи непарністю кількості перестановок. Усього маємо $4!=24$ ненульових компонент. При згортанні добутку ε^{iklm} з ε_{nprs} отримаємо

$$\varepsilon^{iklm} \varepsilon_{iklm} = -24. \quad (1.106)$$

Насправді ε^{iklm} є псевдотензором. При інверсії його компоненти (визначені однаково для всіх систем координат!) не змінюються, а компоненти тензора повинні змінювати знак.